# 後期

**1** 等比数列および等比数列の和についての基本的な知識および計算遂行能力を確認する問題.

(1) ア 67.5　(2) イ　217.5

**2** 三角関数および媒介変数表示された曲線の長さの求め方についての基本的な知識と計算遂行能力を確認する問題.

(1) ウ $-9$　エ 9　オ $4\sqrt{3}$　カ $4\sqrt{3}$

(2) キ 0　ク $9\sqrt{3}$　ケ $4\sqrt{3}$　コ $4\sqrt{3}$

(3) サ $32\sqrt{3}$

**3** 点と直線の距離についての知識と計算遂行能力を確認する問題.

(1) シ $9b^2$　ス $12ab$　セ $4a^2$ ソ $4a$　タ $6b$

(2) チ $\dfrac{1}{4a}$　ツ $\dfrac{1}{4a}$　テ $-\dfrac{3b}{8a^2}$

(3) ト $4x^4 - x^2$　ナ $\dfrac{1}{2}$

**4** (1) 定義に基づいた導関数の計算を通して，二項定理や因数分解および三角関数の基本的な知識と説明を簡潔に記述する能力を確認する問題.

$x^n$ の導関数は

$$(x^n)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \tag{1}$$

である．$(x+h)^n$ に二項定理を用いて，

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k x^{n-k} h^k \left(= x^n + {}_nC_1 x^{n-1} h + {}_nC_2 x^{n-2} h^2 + \cdots + {}_nC_n h^n\right)$$

を得る．したがって，

$$(x+h)^n - x^n = h\, {}_nC_1 x^{n-1} + h^2 \sum_{k=2}^{n} {}_nC_k x^{n-k} h^{k-2}. \tag{2}$$

(1) 式の分子を (2) 式で置き換えて，極限を計算すると

$$\begin{aligned}(x^n)' &= \lim_{h \to 0} \frac{h\, {}_nC_1 x^{n-1} + h^2 \sum_{k=2}^{n} {}_nC_k x^{n-k} h^{k-2}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left( {}_nC_1 x^{n-1} + h \sum_{k=2}^{n} {}_nC_k x^{n-k} h^{k-2} \right) = {}_nC_1 x^{n-1}.\end{aligned}$$

を得る．以上より $(x^n)' = {}_nC_1 x^{n-1} = n x^{n-1}$ である.

(2) 導関数の定義にしたがうと，

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\sin x}{x}\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\sin(x+h)}{x+h}-\frac{\sin x}{x}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x\sin(x+h)-(x+h)\sin x}{hx(x+h)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x\sin x\cos h + x\cos x\sin h - x\sin x - h\sin x}{hx(x+h)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x\sin x(\cos h-1) + x\cos x\sin h - h\sin x}{hx(x+h)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x\sin x}{x(x+h)}\cdot\frac{\cos h-1}{h}+\frac{x\cos x}{x(x+h)}\cdot\frac{\sin h}{h}-\frac{\sin x}{x(x+h)}
\end{aligned}
$$

ここで，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0$ （後述）を用いて，

$$
\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\sin x}{x^2}\cdot 0+\frac{x\cos x}{x^2}\cdot 1-\frac{\sin x}{x^2}=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}
$$

となる．したがって，

$$
\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x-\sin x}{x^2}
$$

である．なお，

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(\cos h-1)(\cos h+1)}{h(\cos h+1)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos^2 h-1}{h(\cos h+1)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-\sin^2 h}{h(\cos h+1)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-\sin h}{h}\cdot\frac{\sin h}{(\cos h+1)} = -1\cdot 0 = 0
\end{aligned}
$$

である．