

## 後期

- 1 与えられた条件を満たす整数の組を求める問題と式を用いてデータの平均や分散を求める問題．整数の組を求めるにあたっては範囲の絞り込むための誘導を付した．場合分け、因数分解等を用いて考察する能力を確認している．

(1) (i) (b), (d)

(ii) (3, 3, 4, 12), (3, 3, 6, 6), (3, 4, 4, 6), (4, 4, 4, 4)

(2) ア:  $\frac{1}{2}$  イ: 5

- 2 複素数平面上の図形についての問題．アポロニウスの円を題材として、複素数についての基本的な知識や扱い方、平面図形に応用する能力を確認している．

(1) ウ:  $\frac{3}{4}i$  エ:  $\frac{3}{2}i$  (2) オ:  $\frac{9}{8}\alpha$  カ:  $\frac{3}{8}|\alpha|$  (3) キ:  $i$  ク:  $\frac{1}{3}$  (4) ケ:  $-\frac{2\sqrt{2}}{9} + \frac{8}{9}i$

- 3 座標平面上の異なる 2 直線の交点を考えることで表れる数列の問題．記載された手順を理解する能力および計算遂行能力、あわせて要点をおさえて証明する能力を確認している．

(1) コ  $a_n$  (2) サ 1 シ  $\frac{2a_n}{a_n^2 + 1}$

(4) ス  $2\theta_n$  セ  $2^{n-1}$

(3) (I)  $n = 1$  の場合． $a_1 = 1/3$  なので  $0 < a_1 < 1$  である．

(II)  $n = k$  のとき、 $0 < a_k < 1$  が成り立つと仮定する． $a_{k+1} = \frac{2a_k}{1 + a_k^2}$  は分子、分母とも正の数なので  $a_{k+1} > 0$  である．また、相加平均と相乗平均の関係式より、

$$a_k + \frac{1}{a_k} > 2 \Leftrightarrow 1 > \frac{2}{a_k + \frac{1}{a_k}} = \frac{2a_k}{1 + a_k^2} = a_{k+1}$$

よって、 $0 < a_{k+1} < 1$  となる．

(I), (II) よりすべての自然数  $n$  について  $0 < a_n < 1$  が成り立つ．

4 三角関数の微分積分の基本についての証明問題. 高等学校の教科書に記載されている証明を理解しているか確認している.

$$(1) \quad \text{ソ } \frac{1}{2} \sin x \quad \text{タ } \frac{1}{2} x \quad \text{チ } \frac{1}{2} \tan x$$

(2)  $x > 0$  のとき.  $x \rightarrow +0$  とするので  $x < \pi/2$  とする.

(1) の面積の関係より,  $\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x$  となる. 上式を  $\frac{1}{2} \sin x (> 0)$  で割り, 逆数をとると,

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +0} \cos x \leq \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow +0} 1$$

となる.  $\lim_{x \rightarrow +0} \cos x = 1, \lim_{x \rightarrow +0} 1 = 1$  なので, はさみうちの原理により,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \dots\dots(\#)$$

となる.

$x < 0$  のとき

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{-\sin t}{-t} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin t}{t} = 1 \quad (\because (\#) \text{ より})$$

となる. 以上より

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

が示された.