

前期

- 1 図形の回転および平行移動を式を用いて表現する能力とあわせて三角関数についての基本的な知識を確認する問題.

$$\text{ア: } -\sqrt{3}\sin\theta \left(\sqrt{3}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right) \quad \text{イ: } -\sqrt{3}\cos\theta \left(\sqrt{3}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$\text{ウ: } -\cos\theta (\cos(\theta + \pi)) \quad \text{エ: } -\sin\theta (\sin(\theta + \pi))$$

$$\text{オ: } \frac{\pi}{3} \quad \text{カ: } \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

- 2 変量を数学的な関数で変換することにより、箱ひげ図の形状がどのように変化するかを考察する問題. 中央値について調べること、箱ひげ図の範囲のそろえ方を誘導とし、計算遂行能力を確認している.

$$(1) \text{ キ: } \frac{x_{25} + x_{26}}{2} \quad (2) \text{ (i) } 2 \quad \text{(ii) } 1 \quad \text{(iii) } 1 \quad \text{(iv) } 1$$

$$(3) \text{ ク: } x_{50} - x_1 \quad \text{ケ: } x_{50} + x_1 \quad \text{コ: } x_{25}^2 + x_{26}^2 - 2x_1^2$$

$$(4) \text{ サ: } x_{26} - x_1 \quad \text{シ: } D$$

- 3 与えられた変換により領域内の点 (の集合) が、どのような点 (の集合) に移動するかを調べ、その集合を式を用いて記述させる問題. あわせて計算遂行能力と計算について簡潔に説明する能力を確認している.

- (1) 点 $P(s, t)$ が D 上を動くので $s^2 + t^2 \leq 1$ となる. 点 Q と点 P は

$$s = \frac{5}{2}(v - b), \quad t = -\frac{5}{2}(u - a)$$

という関係にある. これを $s^2 + t^2 \leq 1$ に代入して,

$$\left\{ \frac{5}{2}(v - b) \right\}^2 + \left\{ -\frac{5}{2}(u - a) \right\}^2 \leq 1 \Leftrightarrow (u - a)^2 + (v - b)^2 \leq \frac{4}{25}$$

を得る. したがって領域 E は $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq \frac{4}{25}$ と表せる.

$$(2) \text{ ス: } a^2 + b^2 \leq \frac{9}{25}$$

$$(3) \text{ セ: } \frac{25}{29} \quad \text{ソ: } \frac{10}{29} \quad \text{タ: } \frac{10}{29} \quad \text{チ: } \frac{25}{29}$$

$$(4) \text{ ツ: } x^2 + y^2 \leq \frac{9}{29}$$

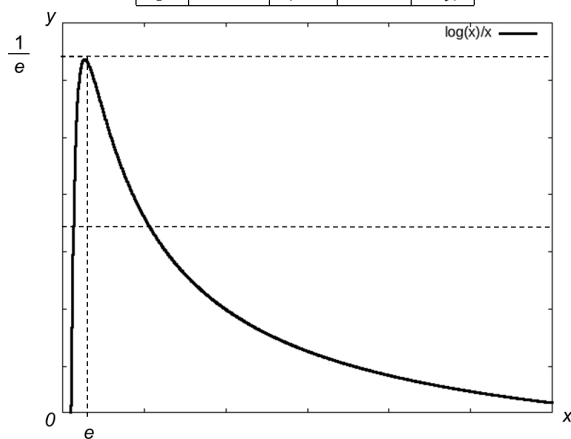
- 4 2つの曲線の共有点の個数を調べる問題. 対数関数や微分についての知識を適切に利用する能力、変数と定数を区別し整理する能力、および積分についての基本的な知識を確認している. あわせて計算遂行能力と説明を簡潔に記述する能力を確認している.

(1) $x^a = a^x$ において両辺の対数をとると $a \log x = x \log a$ を得る. 両辺を ax で除すと

$$\frac{\log x}{x} = \frac{\log a}{a}$$

となる. $y = \frac{\log x}{x}$ とおくと, $y' = \frac{1 - \log x}{x^2}$ であり, $y' = 0$ となる x は $x = e$ である. したがって y の増減表とグラフは次のようになる.

x	0	...	e	...
y'		+	0	-
y	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$



$k = \frac{\log a}{a}$ とおくと, $0 < k \leq e^{-1}$ である. $0 < k < e^{-1}$ のとき $y = k$ となる x は2個,

$k = e^{-1}$ のとき $y = k$ となる x は1個となる.

以上より, $\frac{\log a}{a} = e^{-1}$, つまり $a = e$ のとき, $x^a = a^x$ を満たす x は1個, $0 < \frac{\log a}{a} < e^{-1}$, つまり $1 < a < e$ または $a > e$ のとき, $x^a = a^x$ を満たす x は2個となる.

(2) 2, 4

(3) テ: $992 \log 2 - 600$